

# 南京市职业学校 2021 级对口单招第一次调研性统测

## 数学 试卷

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答案要求：

1. 本试卷共 4 页，包含选择题（第 1 题～第 10 题，共 10 题）、非选择题（第 11～第 23 题，共 13 题）两部分。本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

2. 答题前，请务必将自己的姓名、考试证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。

3. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再涂选其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。

4. 如需作图，须用 2B 铅笔绘，写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，每小题列出的四个选项中，只有一项是符合要求的）

1. 已知集合  $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ， $N = \{x | x > 3 \text{ 或 } x < -1\}$ ，则  $M \cap N = ( \quad )$

- A.  $\{-2, -1, 0, 1\}$       B.  $\{0, 1, 2\}$       C.  $\{-2\}$       D.  $\{-2, -1\}$

2. 已知  $z = \frac{1-i}{2+2i}$ ，则  $z - \bar{z} = ( \quad )$

- A.  $-i$       B.  $i$       C. 0      D. 1

3. 已知命题  $p: (88)_{10} = (1011001)_2$ ，命题  $q: \text{若 } ac^2 > bc^2, \text{ 则 } a > b$ ，给出下列四个复合命题：①  $\neg p$ ，②  $\neg q$ ，③  $p \text{ 且 } q$ ，④  $p \text{ 或 } q$ ，其中真命题的个数为 ( )

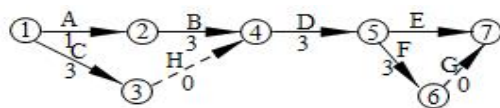
- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

4. 若数组  $\vec{a} = (-2, 1, 3)$  和  $\vec{b} = \left(1, -\frac{1}{2}, x\right)$  满足  $\vec{a} = -2\vec{b}$ ，则实数  $x$  等于 ( )

- A.  $-\frac{1}{2}$       B.  $-\frac{3}{2}$       C. -2      D. -3

5. 某项工程的网络图如图所示（单位：天），若该工程的最短总工期为 10 天，则 E 工序所需工时最多为 ( ) 天。

- A. 4      B. 3      C. 2      D. 1



6. 中国古代的五经是指：《诗经》、《尚书》、《礼记》、《周易》、《春秋》。现甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学分别选取了其中一本不同的书作为课外兴趣读物研读，若甲、乙都没有选《诗经》，乙也没选《春秋》，则 5 名同学所有可能的选择有 ( ) 种。

- A. 24      B. 36      C. 54      D. 72

7. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  在区间  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$  单调递增，直线  $x = \frac{\pi}{6}$  和  $x = \frac{2\pi}{3}$  为函数

$y = f(x)$  的图像的两条相邻对称轴, 则  $f(\frac{5\pi}{12}) =$  ( )

- A.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $-\frac{1}{2}$       C. 0      D.  $\frac{1}{2}$

8. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的一条渐近线过点  $(2, \sqrt{3})$ , 且双曲线的一个焦点在抛物线  $y^2 = 4\sqrt{7}x$  的准线上, 则双曲线的方程为 ( )

- A.  $\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{28} = 1$       B.  $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{21} = 1$       C.  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$       D.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

9. 斜边长为 2 的等腰直角三角形, 绕其腰旋转  $180^\circ$  形成的几何体体积为 ( )

- A.  $\frac{4\pi}{3}$       B.  $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$       C.  $\frac{2\pi}{3}$       D.  $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

10. 若两个正数  $x, y$  满足  $4x + y = xy$ , 则  $x + \frac{y}{4}$  的最小值是 ( )

- A. 1      B. 2      C.  $3\sqrt{2}$       D. 4

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

11. 执行下面的程序框图, 则输出  $B =$  \_\_\_\_\_。

12. 已知  $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}, \cos(\pi + \alpha)\sin(\pi - \beta) = -\frac{1}{6}$ , 则

$\cos(2\alpha + 2\beta) =$  \_\_\_\_\_。

13. 定义在  $\mathbb{R}$  上的偶函数  $f(x)$ , 在区间  $[0, +\infty)$  上是增函数,

且  $f(2) = 0$ , 则  $xf(x) < 0$  的解集为 \_\_\_\_\_。

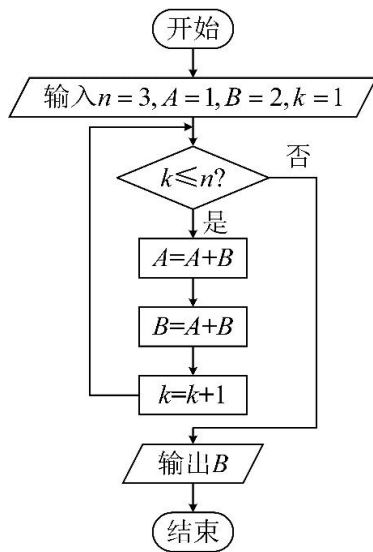
14. 设直线  $l: y = kx + b$  ( $k > 0$ ), 圆  $C_1: x^2 + y^2 = 1$ ,

$C_2: \begin{cases} x = 4 + \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数), 若直线  $l$  过  $C_1$  圆心且与

圆  $C_2$  相切, 则  $l$  的方程为 \_\_\_\_\_。

15. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} |6x - 2|, & x < 1 \\ 2^{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$  若存在实数  $a, b, c$  ( $a < b < c$ ) 使得

$f(a) = f(b) = f(c)$ , 则  $\frac{a+b}{c}$  的范围是 \_\_\_\_\_。



三、解答题：（本大题共 8 题，共 90 分）

16.（8 分）已知关于  $x$  的不等式  $ax^2 + x + c > 0$  的解集为  $(-1, 2)$ ,

(1) 求  $a, c$  的值;

(2) 求函数  $f(x) = \log_c (|2x - 3| + a)$  的定义域.

17.（本题 10 分）已知函数  $f(x)$  是定义在  $R$  上的奇函数，且满足  $f(x+2) = f(-x)$ ，当

$$0 \leq x \leq 1 \text{ 时, } f(x) = ae^x + b, \quad f\left(\frac{15}{2}\right) = 1 - \sqrt{e},$$

(1) 求  $a, b$ ;

(2) 求  $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2022) + f(2023)$  的值;

(3) 若  $f(\ln x) > c^2 - 2c - 4$  恒成立时，求  $c$  的取值范围.

18.（本题 12 分）已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 2 \sin x \cos x$ ,

(1) 求函数  $f(x)$  的最小正周期及  $f(x)$  取最大值时  $x$  的取值集合;

(2) 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对边分别为  $a, b, c$ ，其周长是 20，面积为  $10\sqrt{3}$ ， $f\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，求边  $a$  的长.

19.（本题满分 12 分）已知关于  $x$  的二次函数  $f(x) = ax^2 - 4bx + 1$ .

(1) 设集合  $A = \{-1, 1, 2, 3\}$  和  $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ，分别从集合  $A, B$  中随机取一个数作为  $a$  和  $b$ ，求函数  $y = f(x)$  在区间  $[1, +\infty)$  上是增函数的概率;

(2) 设点  $(a, b)$  是区域  $\begin{cases} x + y - 8 < 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$  内的随机点，求函数  $y = f(x)$  在区间  $[1, +\infty)$  上是增

函数的概率.

20. (本题 14 分) 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$ , 设  $b_n = a_{n+1} - a_n$ .

(1) 证明: 数列  $\{b_n\}$  是等差数列;

(2) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(3) 求数列  $\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

21. (本题 10 分) 三年疫情结束后, 市场在复苏, 2023 年小王通过市场调查, 决定投资生产某种电子零件. 已知固定成本为 6 万元, 年流动成本  $g(x)$  (万元) 与年产量  $x$  (万件)

的关系为  $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 6x, & 0 < x < 8 \\ 13x + \frac{256}{x} - 56, & x \geq 8 \end{cases}$ , 每个电子零件售价为 12 元, 若小王加工的零件能

全部售完.

(1) 求年利润  $f(x)$  (万元) 关于年产量  $x$  (万件) 的函数解析式;

(2) 求当年产量  $x$  为多少万件时年利润  $f(x)$  最大? 最大值是多少?

22. (本题 10 分) 某县为了提振乡村经济, 鼓励农民利用自有住房从事农家乐、民宿经营活动. 小李有楼房一幢, 室内面积共  $210 \text{ m}^2$ , 拟分隔成两类房间作为旅游客房. 大房间面积为  $18 \text{ m}^2$ , 可住游客 5 名, 每名游客每天住宿费为 40 元; 小房间每间面积为  $15 \text{ m}^2$ , 可住游客 3 名, 每名游客每天住宿费为 50 元; 装修大房间每间需 1000 元, 装修小房间每间需 600 元. 如果小李只能筹款 9800 元用于装修, 且游客能住满客房, 他应分隔出大房间和小房间各多少间, 能获得最大收益?

23. (本题 14 分) 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 点  $M(0, 2)$  是椭圆的一个顶点,  $\Delta F_1 M F_2$  是等腰直角三角形.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 过点  $M$  分别作直线  $MA, MB$  交椭圆于  $A, B$  两点, 设两直线的斜率分别为

$k_1, k_2$ , 且  $k_1 + k_2 = 8$ , 证明: 直线  $AB$  过定点  $(-\frac{1}{2}, -2)$ .